

文章编号: 1000-8055(2007)05-0779-06

非线性转子-密封系统稳定性 与分岔

叶建槐, 刘占生

(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 对单盘转子密封系统的分岔特性进行了研究, 利用快速 Galerkin 方法和 Floquet 理论得到了转子密封系统的分岔转迁集, 并分析了转子不平衡量、密封间隙以及密封两侧压差对系统分岔特性的影响, 结果表明转子系统在密封流体作用下存在倍周期和 Hopf 分岔. 最后通过数值仿真验证了所求得的分岔转迁集的正确性. 研究结果为控制转子系统的稳定性提供了理论依据.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 非线性力学; 转子-密封系统; Hopf 分岔; 倍周期分岔; 稳定性; 转迁集中图分类号: V231.9 文献标识码: A

Study on the stability and bifurcation of nonlinear rotor-seal system

YE Jian-huai, LIU Zhan-sheng

(School of Energy Science and Engineering,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The bifurcations of a rigid rotor-seal system were studied in a relatively wide parameter range. The transition boundaries of the system were obtained and the effect of the degree of rotor imbalance, clearance of the seal and the pressure drop of the flow in the seal on the bifurcations characteristics of the system was analyzed with fast Galerkin method in combination with Floquet theory. The result shows that the rotor system may undergo period doubling or Hopf bifurcations caused by the fluid-induced vibration. In some typical parameter ranges, the bifurcation diagrams of the rotor-seal system are acquired with numerical integral method. The simulation result verifies the correctness of the transition boundaries. The result provides the theoretical base for qualitatively controlling the stable operating state of rotors.

Key words: aerospace propulsion system; nonlinear mechanics; rotor-seal system; Hopf bifurcation; period doubling; stability; transition boundary

密封是旋转机械中的关键部件之一, 由于现代旋转机械的转速和介质压力不断提高, 转子柔性不断增加, 密封间隙流体激振问题日益突出, 抑制密封间隙的流体激振已成为现代旋转机械发展

的关键技术之一. 由于密封结构和流体的特点, 其流体动力学方程非常复杂, 难以直接用准确的非线性密封力解析表达式描述, 这给系统的动力学特性分析带来了困难. 目前对于转子-密封系统模

收稿日期: 2006-04-27; 修订日期: 2006-06-16

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(10632040)

作者简介: 叶建槐(1977), 男, 浙江温州人, 助教, 在职博士生, 主要从事密封动力学、转子动力学研究.

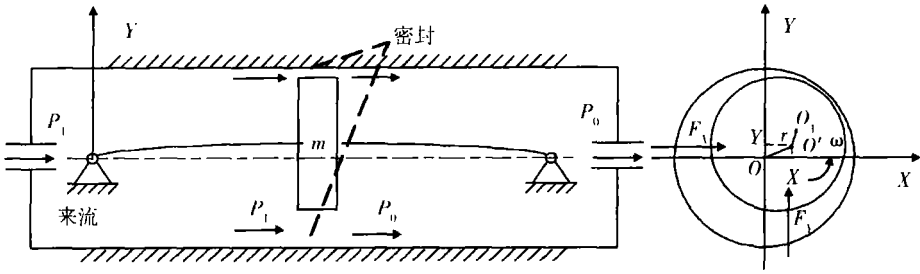


图 1 转子密封系统
Fig. 1 Mode of rotor seal system

型的非线性稳定性研究刚刚起步, 作为整个复杂转子系统一部分的密封, 研究它的非线性流体激励效应, 对于合理解释大型转子轴系实际运行中出现的许多复杂动力学现象是不可缺少的. 正因为如此, 这方面的研究越来越引起人们的重视^[1-6].

基于实验观察的 Muszynska 模型^[7-10]能够较好地反映密封力的非线性特性, 对它的研究和应用受到了国内外学者的重视, 当前针对转子-密封系统非线性动力学行为的研究大多基于该模型, 但是这些研究大多是在某些特定的密封参数下进行的^[1-4], 难以说明密封参数对转子-密封系统全局动力学行为的影响, 不能全面的反映转子-密封系统的整体运动特性. 丁千等利用 Poore 的代数判据对转子密封系统的 hopf 分岔解^[5]及其附近的 1/2 亚谐共振情况下的振动性态^[6]进行了分析. 本文将快速 Galerkin 法^[11]和 Floquet 理论结合起来从整体的角度对单盘转子-密封系统的非线性稳定性及其分岔问题进行了研究, 得到系统的分岔转迁集, 分析了密封参数对转子-密封系统动力学行为的影响规律. 同时采用数值积分的方法, 依据所得转迁集选择参数变化方向, 得到了系统在某些参数下的分岔图, 验证了所得分岔转迁集的正确性. 分析结果为转子系统的设计以及定性地控制转子的稳定性提供了理论依据.

1 非线性转子-密封系统动力学模型

图 1 所示为单盘转子-密封系统, 转子为两端简支的单圆盘系统, 密封力等效作用在圆盘处, 转子存在不平衡量, 圆盘几何中心为 O', 质量偏心为 O₁, 偏心距为 r, 圆盘质量为 m_R, 转子阻尼为 D_R, 转子刚度为 K_R, 转子转速 ω, 密封力为 F_X, F_Y, 系统动力学方程可写为

$$\begin{bmatrix} m_R & \\ & m_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_R & \\ & D_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_R & \\ & K_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mr\omega^2\cos(\omega t) \\ mr\omega^2\sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式(1)中, 密封力 F_X, F_Y 由 Muszynska 模型给出, 该模型是 Muszynska 和 Bently 在大量实验的基础上提出来的. 其特点是: 密封激励力对转子的扰动反力以平均角速度 τω 绕轴颈旋转, 其中 τ 为流体周向平均速比, 该反力在固定坐标中可由式(2)描述

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K - m_f\tau^2\omega^2 & \tau\omega D \\ -\tau\omega D & K - m_f\tau^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 2\tau m_f\omega \\ -2\tau m_f\omega & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, K, D, m_f 分别体现了流体对转子扰动运动的刚度, 阻尼和惯性效应. 实验和数值研究结果证实: τ, K 和 D 均为扰动位移 X, Y 的非线性函数, 即

$$K = K_0(1 - e^2)^{-n}, D = D_0(1 - e^2)^{-n}, \\ n = \frac{1}{2} \sim 3$$

$$\tau = \tau_0(1 - e)^b, 0 < b < 1$$

其中 e = √(X² + Y²)/c 为转子相对偏心位移, c 为密封间隙. 一般 τ₀ < 1/2, K₀, D₀ 以及 m_f 可以用 Childs 的环压密封动力系数公式计算.

引入无量纲变换 x = X/c, y = Y/c, kτ = ωt, 其中: k 为正整数, 同步或超谐解时 k = 1, 亚谐解时 k > 1, 另外设 M = m_R + m_f, 则(1)式变为

$$\begin{cases} \ddot{x} = g_x(x, \dot{x}, y, \dot{y}, k) + \beta\cos(k\tau) \\ \ddot{y} = g_y(x, \dot{x}, y, \dot{y}, k) + G + \beta\sin(k\tau) \end{cases} \quad (3)$$

公式(3)中

$$\begin{cases} g_x(x, \dot{x}, y, \dot{y}, k) = -D_{a1}\dot{x} - D_{a2}\dot{y} - K_{a1}x - K_{a2}y \\ g_y(x, \dot{x}, y, \dot{y}, k) = D_{a2}\dot{x} - D_{a1}\dot{y} + K_{a2}x - K_{a1}y \end{cases}$$
$$k_{a1} = \frac{k^2(K_R + K - m_f\tau^2\omega^2)}{M\omega^2},$$
$$k_{a2} = \frac{k^2\tau^2 D}{M\omega}, G = -\frac{k^2 mg}{M_C\omega^2}$$
$$D_{a1} = \frac{k(D_R + D)}{M\omega}, D_{a2} = \frac{2m_f k\tau}{M}, \rho = \frac{k^2 m r}{M_C}$$

2 快速 Galerkin 法求系统的稳态周期解

方程(3)是一强非线性系统,记 $x_1 = x, x_2 = y, g_1 = g_x, g_2 = g_y$,则可设其前 m_s 阶近似周期解为

$$x_i(\tau) = a_{i0} + \sum_{m=1}^{m_s} [a_{im} \cos(m\tau) + b_{im} \sin(m\tau)]$$

(4)

同样设: $g_i(x, \dot{x}, y, \dot{y}, k) = A_{i0} + \sum_{m=1}^{m_s} [A_{im} \cos(m\tau) + B_{im} \sin(m\tau)]$,显然 A_{i0}, A_{im}, B_{im} 为 $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}$ 的函数.由方程(3),根据谐波系数的比较,可得未知系数 $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}$ 应满足如下关系式

$$\begin{cases} \mathbf{g}_0 = \{g_{01}, g_{02}\} = \\ \left\{ \begin{aligned} &A_{10}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) \\ &G + A_{20}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) \end{aligned} \right\} = 0 \\ \mathbf{g}_m = \{g_{m1}, g_{m2}\} = \\ \left\{ \begin{aligned} &m^2 a_{1m} + A_{1m}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) + \xi_m \\ &m^2 a_{2m} + A_{2m}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) \end{aligned} \right\} \\ = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{g}_{sm} = \{g_{sm1}, g_{sm2}\} = \left\{ \begin{aligned} &m^2 b_{1m} + B_{1m}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) \\ &m^2 b_{2m} + B_{2m}(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}) + \xi_m \end{aligned} \right\}$$
$$= 0 \delta_m^k = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k \neq n, n = 1 \dots m \end{cases} \quad (5)$$

故 $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}$ 这 $4m_s + 2$ 个待定系数可由(6)式确定,从而将系统的稳态周期解问题转化为非线性代数方程组求解问题.

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{f}_0^T, \mathbf{f}_{c1}^T, \mathbf{f}_{s1}^T, \dots, \mathbf{f}_{am_s}^T, \mathbf{f}_{sm_s}^T\} = 0 \quad (6)$$

其中 $\mathbf{X} = \{a_{i0}, \dots, a_{im_s}, b_{i1}, \dots, b_{im_s}\}^T$

为了求解方程组(6),本文利用同伦算法对初值没有严格限制的特点,首先选取一组初始值,通过求解取定的同伦映像获得位于 Newton 迭代吸引域中足够好的迭代初值,然后采用 Newton-Raphon 法进行精确计算,从而克服了初始值选取的问题.另外,该方程组求解的计算量在于计算 $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ 的 Jacobi 矩阵,本文引入了 FFT 算法大大提高了计算速度.

对于方程(3),其右端函数对自变量以及时间 τ 在其闭空间域内和时间轴上连续可导,如果存在一个孤立的周期解,那么就存在一个 Galerkin 近似,当其项数 $m_s \rightarrow \infty$ 时它一致收敛于这个精确周期解;另一方面,若 Galerkin 近似满足一定的条件,则在其近似解的邻域必存在一个精确的孤立周期解^[12].在本文的计算结果中取有效谐波系数 $m \leq m_s/2$,并由 $\|\mathbf{G}(\mathbf{X})\| < 1.0 \times 10^{-6}$ 和 $\|\mathbf{X}\| < 1.0 \times 10^{-6}$ 来保证近似解与精确解在定性和定量上的精度约束.

下面两图分别给出 Galerkin 近似与 Runge-Kutta 法所得轴心轨迹曲线,分析所采用的参数如下: $m_R = 110 \text{ kg}, K_R = 3.4 \text{ MN/m}, D_R = 5 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$,

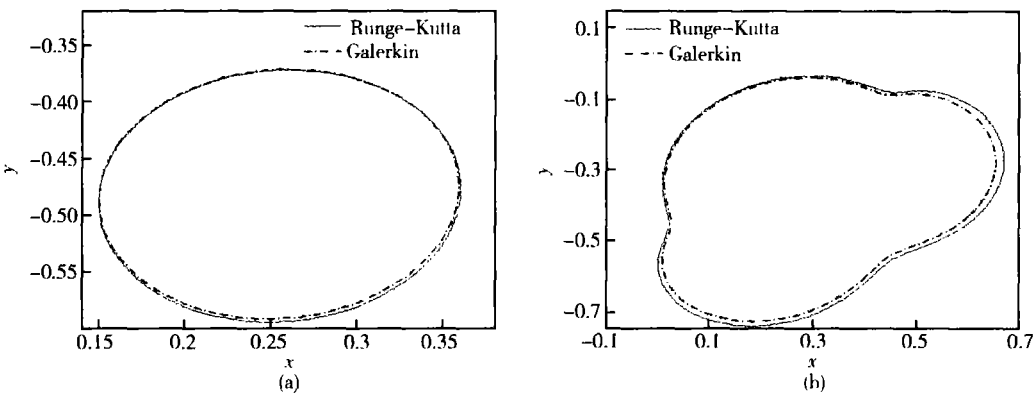


图2 轴心轨迹图
Fig.2 Trajectory of shaft's center

密封半径 $R=0.2\text{ m}$, 密封长度 $L=80\text{ mm}$, 进口损失系数 $z=0.1$, 轴向流速 $v_a=5.0\text{ m/s}$, 密封间隙 $c=0.5\text{ mm}$, 密封两侧压差 $\Delta p=0.5\times 10^5\text{ Pa}$, 经验系数 $\tau_0=0.4$, $n=2$, $b=0.5$, $m_0=-0.25$, $n_0=0.079$. 均取 $n_s=16$, 可满足上面的控制条件, 由于选取的谐波数较多, 在此未列出周期解的近似表达式.

1) 当 $\omega=4780\text{ r/min}$, $e=0.05\text{ mm}$, $k=1$ 时, 其轴型轨迹如图 2(a) 所示, 此时轴心轨迹为椭圆.

2) 当 $\omega=7120\text{ r/min}$, $e=0.02\text{ mm}$, $k=4$ 时, 其轴型轨迹如图 2(b) 所示.

3 系统的稳定性和分岔

为了分析系统的运动稳定性, 首先将非线性转子-密封系统动力学模型(3)转化为扰动变量平衡点的稳定性问题. 记 $x_{11}=\Delta x$, $x_{12}=\dot{\Delta x}$, $x_{21}=\Delta y$, $x_{22}=\dot{\Delta y}$, 则其扰动方程可以写为:

$$\dot{X}=A(\tau)X \tag{8}$$

其中: $X=\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}^T$

$$A(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial \dot{y}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}$$

$A(\tau)$ 为在方程(3)的稳态周期解上展开的具有周期元素的矩阵, $A(\tau+2\pi)=A(\tau)$.

下面采用 Floquet 理论对线性齐次周期系数微分方程组(8)进行稳定性分析, 通过 Runge-Kutta 法在区间 $0\leq \tau\leq 2\pi$ 求系统的基本解矩阵 $\phi(\tau)$, 得其周期端点处取值的矩阵 $\phi(2\pi)$, 它的特征值为 Floquet 乘子. 根据 Floquet 理论, 当所有 Floquet 乘子的模都小于 1 时, 系统是稳定; 当一个 Floquet 乘子通过-1 穿过单位圆, 而其它乘子的模都小于 1 时, 系统产生倍周期分岔; 当一个 Floquet 乘子通过 1 穿过单位圆, 而其它乘子的模都小于 1 时, 系统产生鞍结分岔; 当一对共轭复 Floquet 乘子穿过单位圆, 而其它乘子的模都小于 1 时, 系统产生 Hopf 分岔.

根据上述分析, 分别取 r, ω, c, ω 以及 $\Delta p, \omega$ 作为分岔参数, 得到了在 $\omega-r, \omega-c$ 以及 $\omega-\Delta p$ 这三个参数坐标系中的转迁集, 如图 3(a), (b), (c) 所示.

图 3 所示分岔转迁集中, I 为所有 Hopf 分岔

点组成的 Hopf 分岔集, II 为倍周期分岔点组成倍周期分岔集. 图 3(a) 为转速与转子偏心量构成的分岔转迁集, 图 3(a) 的参数域(1)中, Floquet 乘子的模均小于 1, 系统是渐进稳定的, 在此参数域中系统存在同步周期解; 在 Hopf 分岔集和倍周期分岔集围成的参数域(2)中, 存在一对模大于 1 的共轭复特征乘子, 系统发生 Hopf 分岔; 而倍周期分岔集 II 围成狭长参数域 Floquet 乘子中有一个小于-1 的实数, 系统产生倍周期分岔. 随着不平衡量的增加, 转子的失稳转速提高, 这与工程实践相一致. 转子-密封系统在失稳后动力学行为非常复杂, 存在着倍周期分岔和 Hopf 分岔, 随着转速的升高两种运动形式交替出现.

图 3(b) 为转速与密封间隙构成的分岔转迁集, 在图 3(b) 的参数域(1)中系统渐进稳定, 在参数域(2), (3), (4), (5) 中系统发生 Hopf 分岔, 而在 II 围成狭长参数域中, 系统发生倍周期分岔. 随着密封间隙的增加, 转子的失稳转速先降低后提高, 这里存在一个阈值 c_r , 对应该阈值的转子失稳转速为系统的最小失稳转速.

图 3(c) 为转速与密封两侧压差构成的分岔转迁集, 在 3(c) 的参数域(1)中系统渐进稳定, 参数域(2)中系统发生 Hopf 分岔, 而 II 围成狭长参数域中系统发生倍周期分岔. 随着密封两侧压差的增加, 转子的失稳转速降低, 在两侧压差较小时, 压差的变化对失稳转速的影响非常敏感, 微小的压差变化就能产生很大的失稳转速的变化. 随着密封两侧压差的增加, 压差的变化对失稳转速变化的影响越来越小.

4 数值仿真验证

为了验证图 3 所示分岔转迁集的正确性, 本文选取了两组参数, 采用 Runge-Kutta 计算了这两组参数下的系统动力学行为随转速的变化规律, 这两组参数如下所示.

系统(1) $e=0.02\text{ mm}$, $c=0.5\text{ mm}$, $\Delta p=0.5\times 10^5\text{ Pa}$;

系统(2) $e=0.05\text{ mm}$, $c=0.5\text{ mm}$, $\Delta p=0.5\times 10^5\text{ Pa}$.

其分岔图如图 4 所示, 由图 4 可见, 越过 I 后发生 Hopf 分岔而产生概周期运动, I 和密封的参数以及不平衡量有关. 随着转速的继续提高, 系统出现概周期和倍周期运动交替产生的现象, 在某些狭窄的转速范围内, 出现 4 倍周期、5 倍周期、6 倍周期等等运动现象.

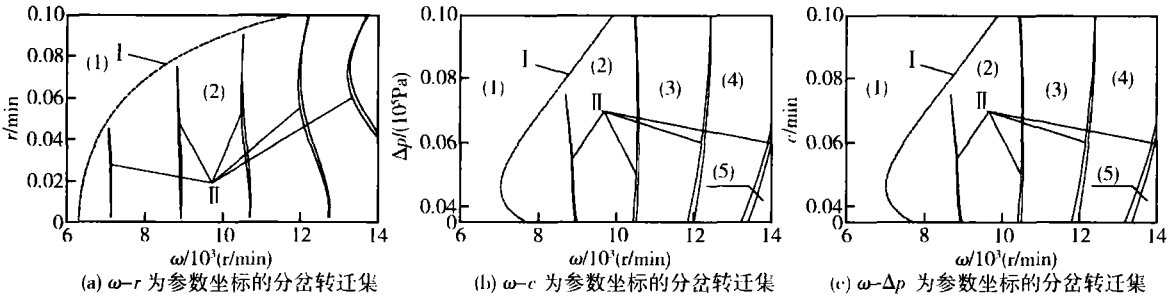


图 3 分岔转迁集 (I ——Hopf 分岔集, II ——倍周期分岔集)

Fig. 3 The transition boundaries (I —Hopf bifurcation, II —Period doubling bifurcation)

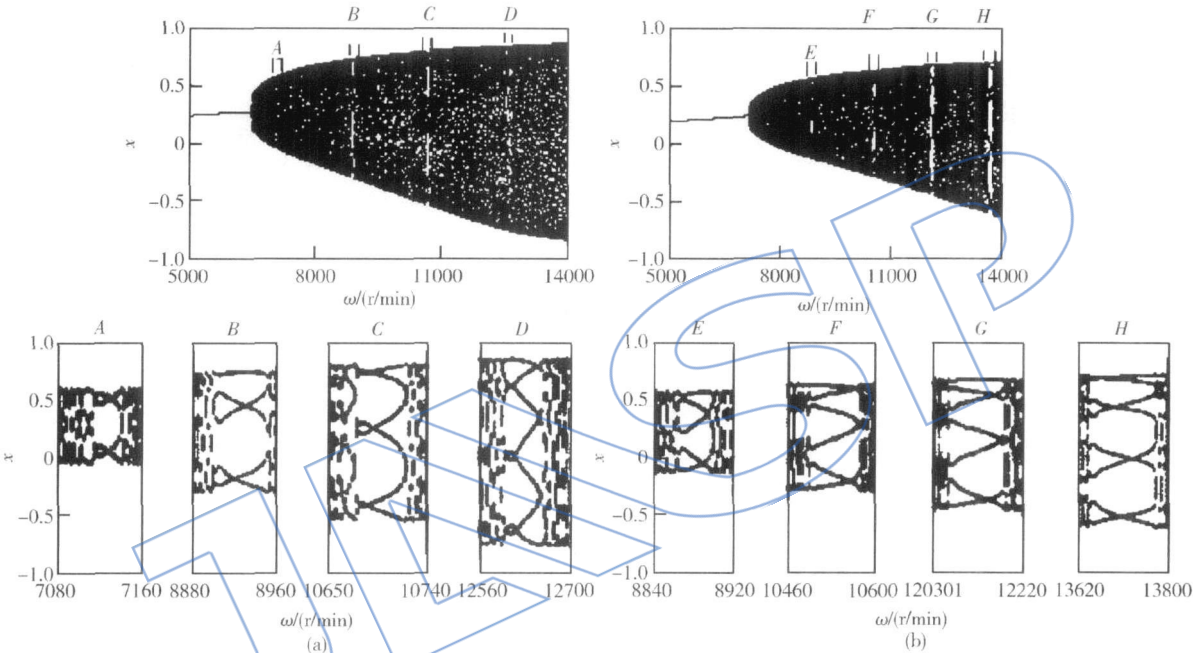


图 4 分岔图及其局部放大图 (a) 系统 1, (b) 系统 2

Fig. 4 Diagrams of bifurcation (a) System 1, (b) System 2

如图 4 (a) 所示, 上图为转子密封系统 (1) 在 5 000~ 14 000 r/min 这一转速域内的分岔图, 与上图的 A, B, C, D 四个转速域对应, 下图描述的是这四个转速域内放大的分岔图. 从分岔图上看, 系统 (1) 在 $\omega=6440$ r/min 时, 发生 Hope 分岔而失稳, 整个过程非常复杂. 在 7 110~ 7 140 r/min, 8 900~ 8 950 r/min, 10 665~ 10 715 r/min, 12 605~ 12 655 r/min 这四个转速域内分别出现 4 倍周期、5 倍周期、6 倍周期和 7 倍周期亚谐运动, 而在 6 440~ 1 400 r/min 的其它转速域内出现该周期运动. 这一结果和分岔转迁集的结果在规律上是完全一致的, 仅在数值上有微小差别, 差别不超过 50 r/min.

如图 4 (b) 所示, 同样上图为转子密封系统 (1) 在 5 000~ 14 000 r/min 这一转速域内的分岔

图, 与上图的 E, F, G, H 四个转速域对应, 下图描述的是这四个转速域内放大的分岔图. 从分岔图上看, 系统 (2) 在 $\omega=7100$ r/min 时, 发生 Hope 分岔而失稳, 在 8 865~ 8 895 r/min, 10 500~ 10 570 r/min, 10 660~ 10 774 r/min, 13 652~ 13 770 r/min 这四个转速域内分别出现 5 倍周期、6 倍周期、7 倍周期和 8 倍周期运动, 而在 7 090~ 1 400 r/min 的其它转速域内出现该周期运动. 这一结果和上述结果完全一致, 系统 (2) 的数值结算结果和分岔转迁集的结果在规律上是完全一致的, 仅在数值上有微小差别, 差别也不超过 50 r/min.

由上述分析知, 数值分析的结果和分岔转迁集的结果一致, 验证了本文给出的分岔转迁集的正确性, 该分岔转迁集能够较全面的体现一定参

数域内系统的整体运动特性,为转子系统的设计以及定性地控制转子的稳定运行提供了理论依据。

5 结 论

(1) 迷宫密封是影响转子运动稳定性的一个重要因素,转子-迷宫密封系统在不平衡量的激励下,在低转速时作稳定的周期运动,而当转速提高到一定值时,系统开始失稳,产生大幅度的涡动,适当的增加不平衡量可以提高转子的失稳转速。

(2) 转子-迷宫密封系统失稳后,在绝大部分转速范围内都处于概周期运动状态,在某些狭窄的转速域内系统会出现各种亚谐运动。

(3) 密封参数对系统的稳定性影响较大,随着密封两端压差的增加,转子的失稳转速降低;在密封两侧压差较小时,压差的变化对失稳转速的影响非常敏感,微小的压差变化就能产生很大的失稳转速的变化。随着密封两侧压差的增加,压差的变化对失稳转速的影响越来越小。

(4) 密封间隙存在一个阈值,当密封间隙小于该阈值时,密封间隙越大,转子失稳转速越低,反之,当密封间隙大于该阈值时,密封间隙越大,转子失稳转速越高,对应该阈值的转子失稳转速为系统的最小失稳转速。

参考文献:

- [1] Hua J, Swaddiwudhipong S, Liu Z S, et al. Numerical analysis of nonlinear rotor seal system[J]. ASME. Journal of Sound and Vibration, 2005, 283: 525-542.
- [2] 张亚红, 华军, 许庆余, 等. 精细积分法在迷宫密封转子系统非线性动力学特性计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2005, 22(5): 541-545.
ZHANG Yahong, HUA Jun, XU Qingyu, et al. A new high precision direct integration scheme for nonlinear rotor seal system[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(5): 541-545.
- [3] 李松涛, 许庆余, 万方义. 迷宫密封转子系统非线性动力稳定性的研究[J]. 应用力学学报, 2002, 19(2): 27-30.
LI Songtao, XU Qingyu, WAN Fangyi. A study on nonlinear dynamic stability of labyrinth seal rotor system[J].

Chinese Journal of Applied Mechanics, 2002, 19(2): 27-30.

- [4] 李松涛, 许庆余, 万方义, 等. 迷宫密封不平衡转子动力系统的稳定性与分岔[J]. 应用数学与力学, 2003, 24(11): 1141-1150.
LI Songtao, XU Qingyu, WAN Fangyi, et al. Stability and bifurcation of unbalance rotor/labyrinth seal system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(11): 1141-1150.
- [5] 陈予恕, 丁千, 侯书军. 非线性转子密封系统的稳定性和Hopf分岔研究[J]. 振动工程学报, 1997, 10(3): 368-374.
CHEN Yushu, DING Qian, HOU Shujun. A study on the stability and hopf bifurcation of nonlinear rotor seal system[J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 10(3): 368-374.
- [6] 丁千, 陈予恕. 非线性转子密封系统的亚谐共振失稳机理研究[J]. 振动工程学报, 1997, 10(4): 404-412.
DING Qian, CHEN Yushu. Study on the mechanism of subharmonic instability of nonlinear rotor/seal systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 10(4): 404-412.
- [7] Muszynska A. Whirl and whip rotor/bearing stability problems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 110(3): 443-462.
- [8] Muszynska A, Bently D E. Frequency swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/bearing/seal systems and fluid handling machines[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 143(1): 103-124.
- [9] Muszynska A, Bently D E. Antiwhirl arrangements prevent rotor/seal in stability[J]. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1989, 111: 156-162.
- [10] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [11] Ling F H, Wu X X. Fast galerkin method and its application to determine periodic solutions of nonlinear oscillators[J]. Int Journal of Nonlinear Mechanics, 1987, 22(2): 89-98.
- [12] 陈予恕, 孟泉. 非线性转子轴承系统的分叉[J]. 振动工程学报, 1997, 9(3): 266-275.
CHEN Yushu, MENG Quan. Bifurcations of a nonlinear rotor bearing system[J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 9(3): 266-275.